arXiv:1306.5849v2 [math.LO] 2 Jul 2013

DE BEAUX GROUPES

THOMAS BLOSSIER ET AMADOR MARTIN-PIZARRO

Résumé. Dans une belle paire (K, E) de corps algébriquement clos, un groupe définissable se projette, à isogénie près, sur les points E-rationnels d'un groupe algébrique ayant pour noyau un groupe algébrique. Un groupe interprétable est, à isogénie près, l'extension des points E-rationnels d'un groupe algébrique par un groupe interprétable, qui est lui le quotient d'un groupe algébrique par les points E-rationnels d'un sous-groupe algébrique.

English Summary

In this short paper, we will provide a characterisation of interpretable groups in a beautiful pair (K, E) of algebraically closed fields : every interpretable group is, up to isogeny, the extension of the subgroup of E-rational points of an algebraic group by an interpretable group which is the quotient of an algebraic group by the E-rational points of an algebraic subgroup.

Introduction

Deux corps algébriquement clos de même caractéristique p satisfont les mêmes propriétés élémentaires du premier ordre (cette collection de propriétés forment alors une *théorie complète*, notée ACF_p). Ainsi, un argument de compacité permet de montrer assez facilement que toute fonction polynomiale injective à plusieurs variables complexes est surjective [1]. La théorie des corps algébriquement clos de caractéristique fixée est un archétype des théories *ω-stables*, qui ont un comportement structuré : la clôture algébrique d'un sous-corps k correspond à la *clôture algébrique* modèle-théorique (l'ensemble des points à orbite fini par les automorphismes fixant k) ; la dimension de Zariski correspond au *rang de Morley*. De plus, l'existence d'un corps de définition pour chaque variété équivaut à *l'élimination des imaginaires*, ce qui permet de travailler avec des quotients, des objets *interprétables*.

De nombreuses questions en géométrie algébrique se traduisent de façon naturelle en théorie des modèles et vice-versa, ce qui a instauré une véritable interaction entre la théories des modèles et la géométrie algébrique.

On est parfois amené à considérer des objets formels à l'intérieur de variétés algébriques. Ces objets sont fréquemment décrits à l'aide de l'algèbre différentielle. Dans le cas différentiel, les corps *différentiellement clos*, qui en caractéristique nulle ont même théorie, représentent l'analogue des purs corps algébriquement clos. De même, la projection d'un ensemble différentiellement constructible le reste. Cette propriété correspond à l'élimination des quantificateurs en théorie des modèles. Les

Date: 3 décembre 2024.
1991 *Mathematics Subject Classification.* 03C45.
Key words and phrases. Model Theory, Groups, Pairs.
Recherche conduite dans le cadre du projet MODIG ANR-09-BLAN-0047.

éléments à dérivée nulle forment un sous-corps propre algébriquement clos. Les paires d'extensions propres de corps algébriquement clos ont été considérées pour elles-mêmes dans les années 60 dans les travaux de Keisler [10], travaux motivés par ceux de Robinson. La théorie des paires d'extensions propres de corps algébriquement clos existe et est en fait la théorie des *belles paires* de modèles de ACF_p. Plus généralement, les belles paires de structures stables furent étudiées par Poizat [15]. Il axiomatisa leurs théories dès que les structures n'ont pas la *propriété de recouvrement fini*.

Quoique les belles paires de corps algébriquement clos sont ω-stables de rang de Morley ω [7, Example 1.5] et que la déviation y est bien comprise [15, 3], elles n'éliminent pas les imaginaires, ni même *géométriquement*. En fait, cette élimination pour une belles paires d'une théorie T éliminant les imaginaires n'est possible que si aucun groupe infini n'est interprétable dans T [14]. Pillay [13] explicite une expansion du langage des belles paires de corps algébriquement clos permettant d'éliminer géométriquement les imaginaires. Plus récemment, Delon [8] a obtenu une expansion naturelle du langage pour l'élimination des quantificateurs. Sa preuve consiste à imposer aux sous-structures d'une belle paire (M, P) d'être P-indépendantes, car pour un uple P-indépendant $\bar{a}$, les formules sans quantificateur satisfaites par $\bar{a}$ (qui forment le *type sans quantificateur*) entraînent toutes les propriétés élémentaires satisfaites par $\bar{a}$, son type parital [3].

L'étude des groupes interprétables est une question récurrente en théorie des modèles. Pour traiter cette question, la construction de groupes à partir d'un diagramme de configuration de groupes introduite par Hrushovski [9] s'avère fondamentale. Dans le cas des corps différentiels, tout groupe interprétable se plonge dans un groupe algébrique [12], ce qui suit en partie du fait que la clôture algébrique d'un uple au sens différentiel correspond à la clôture algébrique corpique du corps différentiel engendré. Dans notre cadre, la clôture algébrique dans le langage introduit par Delon correspond à la clôture algébrique corpique de la structure engendrée.

Grâce aux techniques utilisées dans [5] pour la classification des groupes définissables dans les mauvais corps [2], nous avons pu décrire les groupes interprétables dans une belle paire de corps algébriquement clos (cf. théorème 2.2 et proposition 2.1).

1. Préliminaires

Étant donnés trois sous-corps A, B et C d'un corps commun avec $C \subset A \cap B$, on utilisera la notation

$$A \underset{C}{\downarrow^{\mathrm{ld}}} B$$

pour dénoter que A est linéairement disjoint de B au-dessus de C. Rappelons que cette propriété entraîne que A est algébriquement indépendant de B au-dessus de C, ce que l'on notera

$$A \underset{C}{\downarrow^{0}} B.$$

La réciproque est vérifiée quand C est algébriquement clos.

Pour la suite, L désignera le langage des corps (c.à.d. le langage des anneaux complété par la fonction inverse multiplicative) et E un prédicat unaire supplémentaire. Dans le langage $L \cup \{E\}$, les modèles de la théorie T_E des belles paires des

corps algébriquement clos sont exactement les paires d'extensions propres de corps algébriquement clos [10].

Delon [8] considère l'expansion L_D du langage $L \cup \{E\}$ par des prédicats l_n d'arité n ainsi que des fonctions $(f_{n,i})_{1\leq i\leq n}$ d'arité $n+1$ pour tout entier $n \geq 2$. Dans un modèle (K, E) de T_E, on interprète la relation l_n par les n-uples formés d'éléments de K linéairement indépendants au-dessus de E. Pour $x_1, \ldots, x_n$ linéairement indépendants au-dessus de E et y linéairement dépendant de $x_1, \ldots, x_n$ au-dessus de E, les fonctions $f_{n,i}(y, x_1, \ldots, x_n)$ dénotent les coordonnées de y sur la base $(x_1, \ldots, x_n)$ du sous-espace vectoriel engendré sur le corps E.

Fait 1.1. [8, Théorème 1] La théorie des belles paires des corps algébriquement clos élimine les quantificateurs dans le langage L_D.

Par la suite, on se place dans un modèle suffisamment saturé (K, E) de la théorie T_E des belles paires des corps algébriquement clos dans le langage L_D. On utilisera l'indice 0 pour désigner la structure sous-jacente de pur corps et on dénotera par E_F le sous-corps $E \cap F$ d'un sous-corps F de K.

Remarque 1.2. [8, Corollaire 3 et Fait 8]

- La clôture définissable d'une L_D-sous-structure A est alors sa clôture parfaite. La clôture algébrique au sens parital de A est sa clôture algébrique corpique.
- Une paire (A, E_A) est une sous-structure si et seulement si

$$A \underset{E_A}{\overset{\mathrm{ld}}{\downarrow}} E.$$

  Elle est donc P-indépendante dans le sens [3, Definition 3.7]. En particulier, une sous-structure A est algébriquement indépendante de E au-dessus de E_A et la 0-base canonique $\mathrm{Cb}_0(A/E)$ est donc 0-interalgébrique avec E_A et $E_{\mathrm{acl}(A)} = \mathrm{acl}_0(E_A)$.
- Une sous-structure A algébriquement close, où $E_A \subsetneq A$, est une sous-structure élémentaire.

Rappelons que la structure induite sur E est celle de pur corps algébriquement clos. La description de la déviation dans les *lovely pairs* [3, Proposition 7.3] se traduit pour deux sous-structures A et B avec une sous-structure commune C de la façon suivante :

$$A \underset{C}{\downarrow} B \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} A \underset{C,E}{\overset{0}{\downarrow}} B \\ \text{et} \\ E_A \underset{E_C}{\overset{0}{\downarrow}} E_B \end{cases}$$

Cette caractérisation permet d'obtenir l'analogue à la propriété (†) dans [4], qui sera fort utile par la suite.

Lemme 1.3. *Étant données deux sous-structures A et B indépendantes au-dessus de leur intersection, alors*

$$E_{\mathrm{acl}(A,B)} = \mathrm{acl}_0(E_A, E_B).$$

Démonstration. Par la remarque 1.2, il suffit de montrer que E_D est inclus dans $\mathrm{acl}_0(E_A, E_B)$, où D dénote la sous-structure engendrée par A et B. Comme $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{E_A} E$, la caractérisation de l'indépendance entraîne que

$$A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{E_A,B} E, \text{ d'où } A, B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{E_A,B} E \text{ et } \mathrm{acl}_0(A,B) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{ld}}_{\mathrm{acl}_0(E_A,B)} \mathrm{acl}_0(E,B).$$

On en déduit que $D \subset \mathrm{acl}_0(A,B)$ et $E_D \subset \mathrm{acl}_0(E_A,B)$. De même $E_D \subset \mathrm{acl}_0(E_B,A)$. L'indépendance

$$A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{E_A,E_B,C} B$$

entraîne que $E_D \subset \mathrm{acl}_0(E_A, E_B, C)$. Puisque

$$C \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{E_C} E,$$

on obtient que $E_D \subset \mathrm{acl}_0(E_A, E_B)$.

□

Remarque 1.4. Si A est une sous-structure finiment engendrée sur une sous-structure C, alors $\mathrm{degtr}(A/C)$ et $\mathrm{degtr}(E_A/E_C)$ sont finis.

Démonstration. Soit B un ensemble fini qui engendre A au-dessus C. Posons $A_0 = \mathrm{acl}_0(\mathrm{Cb}_0(C(B)/E))$, où $C(B)$ dénote le (pur) corps engendré par B sur C. Notons que $A_0 \subset E$ et $C(B, A_0)$ est linéairement disjoint de E sur A_0. Ainsi, la structure A est contenue dans $C(B, A_0)$ et alors $E_A = A \cap A_0$. Comme A_0 a degré de transcendance fini sur E_C, on conclut. □

À partir de la description des types dans les belles paires [15, Théorème 9], on peut faire un calcul précis des rangs (*cf.* [7, Example 1.5] et de façon plus explicite dans [17, page 1660]).

Fait 1.5. Soit une sous-structure A finiment engendrée sur une sous-structure C. Alors,

$$\begin{aligned} \mathrm{RM}(A/C) = \mathrm{RU}(A/C) &= \omega \cdot \mathrm{degtr}(A/C, E) + \mathrm{degtr}(E_A/C) \\ &= \omega \cdot \mathrm{degtr}(A/C, E_A) + \mathrm{degtr}(E_A/E_C). \end{aligned}$$

En particulier, pour un groupe algébrique G, on a $\mathrm{RM}(G) = \omega \cdot \dim(G)$ et $\mathrm{RM}(G(E)) = \dim(G)$, où $\dim(G)$ dénote sa dimension de Zariski.

Rappelons qu'une belle paire d'une théorie stable T n'élimine pas les imaginaires dès qu'un groupe infini est interprétable dans T [14]. Néanmoins, la théorie des belles paires des corps algébriquement clos les élimine géométriquement une fois que l'on ajoute certaines sortes de nature algébro-géométrique [13].

Fait 1.6. Pour tout imaginaire e d'une paire (K, E) saturée de corps algébriquement clos, il existe un uple réel d tel que :

(1) $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{e} E$,
(2) il existe un groupe algébrique connexe G agissant sur une variété irréductible V, le tout défini sur E, dont d est le générique de V,
(3) l'imaginaire e est interalgébrique avec le paramètre canonique de $G(E) \cdot d$.

Dans le fait précédent, le $\mathrm{tp}(d/e)$ est E-interne et le groupe G est son groupe de liaison sur E.

2. Groupes interprétables dans la belle paire

Nous disposons tous les ingrédients pour décrire les groupes interprétables dans une belle paire de corps algébriquement clos. Commençons par la caractérisation des groupes définissables, à isogénie près. Rappelons qu'une *endogénie* de G dans H, pour G et H deux groupes définissables, est un sous-groupe définissable S de $G \times H$ tel que :

- la projection sur G est un sous-groupe G_S d'indice fini, et
- le *co-noyau* $\text{coker}(S) = \{h \in H : (1, h) \in S\}$ est fini.

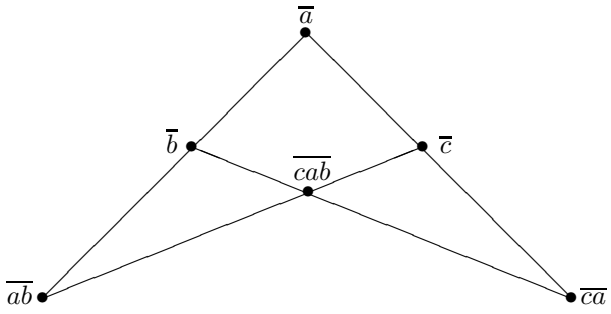
Une telle endogénie induit donc un morphisme de G_S dans $N_H(\text{coker}(S))/\text{coker}(S)$. Une *isogénie* de G vers H est une endogénie de noyau $\ker(S) = \{g \in G : (g, 1) \in S\}$ fini et dont l'image (la projection sur H) est d'indice fini dans H.

Proposition 2.1. *Tout groupe définissable est, à isogénie près, l'extension des points E-rationnels d'un groupe algébrique défini sur E par un groupe algébrique. De plus, tout groupe définissable est isogène à un sous-groupe d'un groupe algébrique.*

Si le groupe est définissable sur une structure A, alors les groupes algébriques obtenus sont définissables sur $\text{acl}(A)$.

Démonstration. Soit G un groupe connexe définissable dans une paire saturée (K, E) sur une structure A. Pour la suite, on ajoute $\text{acl}(A)$ au langage. Étant donnés deux génériques indépendants a et b de G, on dénotera par $\overline{a}$, $\overline{b}$ et $\overline{ab}$ la clôture algébrique des points a, b et ab. Par la remarque 1.2, cette clôture consiste à prendre la clôture algébrique au sens corpique de la L_D-sous-structure correspondante et, par la remarque 1.4, le degré de transcendance de $E_{\overline{a}}$ est fini. En particulier, l'uple $\overline{ab}$ est 0-algébrique sur $\overline{a} \cup \overline{b}$, car le corps engendré par $\overline{a} \cup \overline{b}$ est une sous-structure du fait que a et b sont indépendants.

À l'aide d'un troisième générique c indépendant de a et b, on obtient la 0-configuration de groupe :



où $\overline{c} = \text{acl}(c)$, $\overline{ca} = \text{acl}(ca)$ et $\overline{cab} = \text{acl}(cab)$. Le théorème de configuration de groupe [9] nous donne, par stabilité, un groupe algébrique connexe tel que a est interalgébrique avec son 0-générique, qui n'est pas forcément générique au sens de la paire. Par [5, Lemme 1.5], on peut supposer, à isogénie près, que le groupe G est un sous-groupe de ce groupe algébrique.

Par le lemme 1.3, la partie $E_{\overline{ab}}$ est 0-algébrique sur $E_{\overline{a}} \cup E_{\overline{b}}$. De plus, la caractérisation de l'indépendance entraîne que $E_{\overline{a}}$ et $E_{\overline{b}}$ sont 0-indépendants. De façon analogue, on obtient un groupe algébrique connexe H définissable sur E tel que $E_{\overline{a}}$ est 0-interalgébrique avec un 0-générique h de $H(E)$, qui est également générique au sens de la paire.

Le stabilisateur de $\mathrm{tp}(a,h)$ induit une projection de G sur $H(E)$. Montrons que la composante connexe N du noyau est un groupe algébrique par [5, Proposition 1.8]. Soit n un générique de N sur a . Alors na est un générique de Na sur son paramètre canonique, qui est interalgébrique avec $E_{\overline{a}}$. Comme $(n, 1_H)$ est dans le stabilisateur de $\mathrm{tp}(a,h)$, on a $(na,h) \equiv (a,h)$ et en particulier $E_{\overline{a}} = \mathrm{acl}_0(h) = E_{\overline{na}}$. Le fait 1.5 donne que $\mathrm{tp}(na/E_{\overline{a}})$ est de rang maximal dans $\mathrm{tp}_0(na/E_{\overline{a}})$. De plus, si $x \models \mathrm{tp}_0(na/E_{\overline{a}})$ a même rang que na sur $E_{\overline{a}}$, alors $E_{\overline{x}} = E_{\overline{na}}$ et les structures $\bar{x}$ et $\overline{na}$ sont isomorphes au sens de la paire. Par élimination des quantificateurs, l'élément x a même type que na sur $E_{\overline{a}}$ et N est donc un groupe algébrique.

□

La description des groupes définissables nous permet maintenant de caractériser les groupes interprétables.

Théorème 2.2. *Un groupe interprétable est, à isogénie près, l'extension des points rationnels d'un groupe algébrique défini sur E par un quotient d'un groupe algébrique par un sous-groupe distingué constitué des points rationnels d'un groupe algébrique défini sur E ; c'est-à-dire pour tout groupe interprétable G on a*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow H(E) \longrightarrow 0$$

avec

$$0 \longrightarrow N'(E) \longrightarrow V \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

où V, H et N' sont des groupes algébriques, les deux derniers définis sur E.

Si le groupe est interprétable sur une structure A, alors les groupes obtenus le sont sur $\mathrm{acl}(A)$.

Démonstration. Soit G un groupe connexe interprétable dans une paire saturée (K,E) sur une structure A. Comme auparavant, on ajoute $\mathrm{acl}(A)$ au langage. Soit α un générique de G. Par le fait 1.6, il existe une variété irréductible V définissable sur E tel que α est algébrique sur un générique a de V et, de plus, l'uple a est indépendant de E au-dessus de α.

Soit β un second générique de G au-dessus de a. Notons que

$$a \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\perp} \beta \text{ et } a \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\perp} \alpha \cdot \beta,$$

par transitivité de l'indépendance. Considérons alors $b \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\perp}_{\beta} a$ tel que $(b,\beta) \equiv (a,\alpha)$. À nouveau,

$$b \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\perp} a \quad \text{et} \quad b \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\perp} \alpha \cdot \beta.$$

Prenons $ab \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\perp}_{\alpha\cdot\beta} a, b$ tel que $(ab, \alpha\cdot\beta) \equiv (a,\alpha)$. Alors,

$$ab \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\perp} a \quad \text{et} \quad ab \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\perp} b.$$

Étant donné un troisième générique γ de G au-dessus de a, b, ab, on en déduit que

$$a \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\perp} \gamma\cdot\alpha \quad , \quad b \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\perp} \gamma\cdot\alpha \quad , \quad b \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\perp} \gamma\cdot\alpha\cdot\beta \quad \text{et} \quad ab \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\perp} \gamma\cdot\alpha\cdot\beta.$$

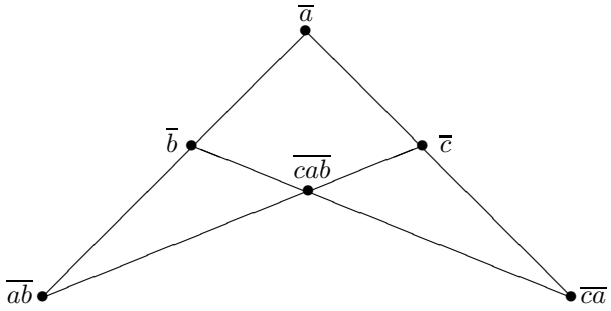
Considérons $c \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\perp}_{\gamma} a, b, ab$ et $ca \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\perp}_{\gamma\cdot\alpha} a, b, ab, c$ tels que $(c,\gamma) \equiv (ca, \gamma\cdot\alpha) \equiv (a,\alpha)$. Alors,

$$c \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\perp} a, b, ab \ , \ c \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\perp} \gamma\cdot\alpha \ , \ c \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\perp} \gamma\cdot\alpha\cdot\beta \ , \ ca \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\perp} a \ , \ ca \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\perp} b \ , \ ca \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\perp} c \text{ et } ca \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\perp} \gamma\cdot\alpha\cdot\beta.$$

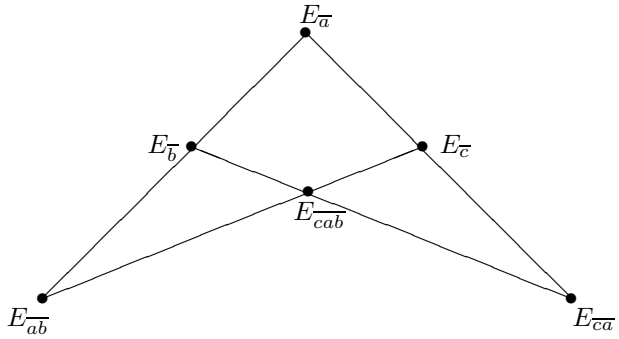
Au risque de fatiguer le lecteur sagace, prenons enfin $cab \bigcirc\!\!\!\!\!\!\downarrow_{\gamma\cdot\alpha\cdot\beta} a, b, ab, c, ca$ tel que $(cab, \gamma\cdot\alpha\cdot\beta) \equiv (a, \alpha)$. On a alors également,

$$cab \bigcirc\!\!\!\!\!\!\downarrow b \quad , \quad cab \bigcirc\!\!\!\!\!\!\downarrow ca \quad , \quad cab \bigcirc\!\!\!\!\!\!\downarrow c \quad \text{et} \quad cab \bigcirc\!\!\!\!\!\!\downarrow ab.$$

Posons $\bar{a} = \mathrm{acl}(a)$ et de même pour les uples réels b, ab, c, ca, cab. Notons que, dans le diagramme suivant, deux points sur une même droite sont indépendants :



Par la suite, étant donné un imaginaire e, on dénotera les éléments réels algébriques sur e par $\mathrm{acl}(e)$. Comme $a \bigcirc\!\!\!\!\!\!\downarrow_{\alpha} E$, on a $E_{\overline{a}} \subset \mathrm{acl}(\alpha) \subset \overline{a}$ et donc $E_{\overline{a}} = \mathrm{acl}(\alpha) \cap E$. De plus, par le lemme 1.3, comme $\overline{a} \bigcirc\!\!\!\!\!\!\downarrow \overline{b}$, on a $E_{\mathrm{acl}(\overline{a},\overline{b})} = \mathrm{acl}_0(E_{\overline{a}}, E_{\overline{b}})$ et, en particulier, l'ensemble $E_{\overline{ab}} \subset \mathrm{acl}_0(E_{\overline{a}}, E_{\overline{b}})$. Ceci est aussi valable pour tout autre couple de points dans une même droite du diagramme précédent. Du fait que α est générique au-dessus de $\beta, \gamma\cdot\alpha$, on en déduit que le point $E_{\overline{a}}$ est indépendant de la droite $E_{\mathrm{acl}(\overline{b},\overline{ca})}$; de même pour tout autre point n'appartenant pas à une droite. Dans la 0-configuration de groupe :



chaque point est de dégré de transcendance fini, par les remarques 1.2 et 1.4. On obtient ainsi un groupe algébrique H défini sur E, dont un générique h dans $H(E)$ est 0-interalgébrique avec $E_{\overline{a}}$. Comme dans le cas précédent, on obtient une endogénie surjective définissable

$$G \to H(E),$$

et notons N la composante connexe de son noyau.

Montrons maintenant que la variété V associée à a est un groupe algébrique. Pour cela, il suffit de vérifier que les points a, b, ab, c, ca, cab obtenus auparavant donnent une 0-configuration de groupe sur l'ensemble de paramètres E. Notons que chaque deux points sont 0-indépendants sur E. De plus, le fait 1.6 entraîne l'existence d'un groupe algébrique connexe G_1 qui agit sur V, le tout défini sur E, tel que α est interalgébrique avec le paramètre canonique de l'orbite $G_1(E)\cdot a$.

Comme α est algébrique sur b, ab, il suit que le rang de Morley $\mathrm{RM}(a/b, ab)$ est borné par $\mathrm{RM}(G_1(E))$, qui équivaut la dimension de Zariski de G_1. Ainsi, par le fait 1.5, l'uple a est 0-algébrique sur E, b, ab, et de même pour les autres droites. On peut donc supposer que V est un groupe algébrique connexe ayant pour générique a. Puisque $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{h} E$, on conclut que V est définissable sur $\mathrm{acl}_0(h) = E_{\overline{a}}$.

Par [5, Lemme 1.5] appliqué au point (a, α) dans le translaté $V \times (N \cdot \alpha)$ défini sur $\mathrm{acl}_0(h)$, on obtient une projection π de V sur N. Rappelons que cette projection provient du stabilisateur de $\mathrm{tp}(a, \alpha / \mathrm{acl}_0(h))$. Considérons n_1 un générique sur a de la composante connexe N_1 de $\ker(\pi)$. Alors, le point $(n_1, 1_N)$ étant dans ce stabilisateur, il suit que $n_1 a \in G_1(E) \cdot a$ et donc que N_1 est de rang fini. La proposition 2.1 et le fait 1.5 entraînent que N_1 est isogène aux points E-rationnels d'un groupe algébrique N'. □

Références

[1] J. Ax, *Injective endomorphisms of varieties and schemes*, Ann. Math., **88**, 239-271 (1969).

[2] A. Baudisch, M. Hils, A. Martin-Pizarro, F. Wagner, *Die böse Farbe*, J. Inst. Math. Jussieu, **8**, 415-443 (2009).

[3] I. Ben-Yaacov, A. Pillay, E. Vassiliev, *Lovely pairs of models*, APAL, **122**, 235–261, (2003).

[4] T. Blossier, A. Martin-Pizarro, F. Wagner, *Géométries relatives*, J. Europ. Math. Soc., to appear. HAL-00514393.

[5] T. Blossier, A. Martin-Pizarro, F. Wagner, *À la recherche du tore perdu*, soumis. HAL-00758982.

[6] E. Bouscaren, *The Group Configuration–after E. Hrushovski*, dans : *The Model Theory of Groups*, 199–209, Notre Dame Math. Lectures, 11, University of Notre Dame Press (1989).

[7] S. Buechler, *Pseudoprojective Strongly Minimal Sets are Locally Projective*, JSL, **56**, 1184–1194, (1991).

[8] F. Delon, *Élimination des quantificateurs dans les paires de corps algébriquement clos*, Confluentes Math., **4**, 1250003, 11pp (2012).

[9] E. Hrushovski, *Contributions to stable model theory*, Ph.D. Thesis, Berkely (1986).

[10] H. J. Keisler, *Complete theories of algebraically closed fields with distinguished subfiels*, Michigan Math. J., **11**, 71–81, (1964).

[11] A. Pillay, Geometric Stability Theory, Oxford Logic Guides, 33. *Oxford University Press* (1996).

[12] A. Pillay, *Some foundational questions concerning differential algebraic groups*, Pacific J. Math., **179**, 179–200 (1997).

[13] A. Pillay, *Imaginaries in pairs of algebraically closed fields*, APAL, **146**, 13–20, (2007).

[14] A. Pillay, E. Vassiliev, *Imaginaries in beautiful pairs*, Illinois J. Math., **48**, 759-768 (2004).

[15] B. Poizat, *Paires de structures stables*, JSL, **48**, 239–249, (1983).

[16] B. Poizat, Groupes Stables. Une tentative de conciliation entre la géométrie algébrique et la logique mathématique, *Nur al-Mantiq wal-Ma´rifah* (1987). Traduction anglaise : Stable groups. Mathematical Surveys and Monographs, 87. *Amer. Math. Soc.* (2001).

[17] B. Poizat, *L'égalité au cube*, J. Symb. Logic, **66**, 1647–1676 (2001).

[18] M. Ziegler, *A Note on generic Types*, unpublished, (2006), (`http://arxiv.org/math.LO/0608433`).

Université de Lyon ; CNRS ; Université Lyon 1 ; Institut Camille Jordan UMR5208, 43 boulevard du 11 novembre 1918, F–69622 Villeurbanne Cedex, France

E-mail address: `blossier@math.univ-lyon1.fr`

E-mail address: `pizarro@math.univ-lyon1.fr`